לוגיקה (1), תרגיל מסכם, פתרון שאלה 2

לכל $m \in M$ נסמן ע"י $N(m)$ את הקבוצה הסופית של שכני m ב-W, כלומר $N(m) = \{w \in W \mid \langle m, w\rangle \in E\}$. בדומה נסמן $N(w) = \{m \in M \mid \langle m, w\rangle \in E\}$.

בשפה $L = \{P_w^m \mid m \in M, w \in W\}$, נגדיר לכל $m \in M$ פסוק האומר כי אנו משדכים ל-m אחת ממכרותיו: $\varphi_m = \bigvee_{w \in N(m)} P_w^m$. זה פסוק בדיוק בגלל ש-$N(m)$ סופית. כמו-כן נגדיר פסוק האומר כי ל-m משדכים רק w אחת: $\chi_m = \bigwedge_{w_1 \neq w_2 \in N(m)} \neg(P_{w_1}^m \wedge P_{w_2}^m)$, וכנ"ל לכל w: $\chi_w = \bigwedge_{m_1 \neq m_2 \in N(w)} \neg(P_w^{m_2} \wedge P_w^{m_2})$.

עתה נגדיר קבוצת פסוקים: $\Gamma = \{\varphi_m \mid m \in M\} \cup \{\chi_m \mid m \in M\} \cup \{\chi_w \mid w \in W\}$. קל לראות כי יש התאמה חח"ע ועל בין מודלים של Γ לבין פתרונות לבעיית הנישואין עבור M.

עתה ניגש לפתרון התרגיל. כוון אחד ברור: אם יש פתרון לבעיית הנישואין עבור M כולה, כלומר פונקציה חח"ע שתחומה M המקיימת את התנאי, אז צמצומה לכל $M_0 \subseteq M$ סופית ייתן פתרון לבעיית הנישואין עבור M_0. נניח עתה כי יש פתרון לבעיית הנישואין עבור כל תת-קבוצה סופית של M. אנו רוצים להראות כי יש פתרון לבעיית הנישואין עבור M כולה, כלומר כי ל-Γ יש מודל.
ניקח תת-קבוצה סופית כלשהי $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, ונסמן ע"י M_0 את קבוצת ה-m המופיעים בפסוקי Γ_0. נסמן $\Gamma_0^* = \{\varphi_m \mid m \in M_0\} \cup \{\chi_m \mid m \in M_0\} \cup \{\chi_w \mid w \in W\}$, ואז מהגדרת M_0 מתקיים $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_0^*$. הנחנו כי בפרט יש פתרון לבעיית הנישואין עבור M_0, כלומר קיימת $f : M_0 \to W$ חח"ע כך שלכל $m \in M_0$ מתקיים $\langle m, f(m)\rangle \in E$. אם נגדיר עתה מבנה ל-L ע"י f באופן הבא:

$$M(P_w^m) = \begin{cases} T \mid m \in M_0 \wedge f(m) = w \\ F \mid m \in M_0 \wedge f(m) \neq w \\ F \mid m \notin M_0 \end{cases}$$

אז מכך ש-f פונקציה שתחומה M_0 נובע ש-M מודל של φ_m ו-χ_m לכל $m \in M_0$, ומכך ש-f חח"ע נובע ש-M מודל של χ_w לכל $w \in W$, כלומר בסה"כ M מודל של Γ_0^*. אבל $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_0^*$, לכן M גם מודל של Γ_0.
הראנו כי לכל $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ סופית יש מודל, לכן נובע ע"י משפט הקומפקטיות כי קיים מודל לכל Γ, וכאמור מודל כזה מקודד פתרון לבעיית הנישואין עבור כל M, כדרוש.